Volume de sous-variétés algébriques aléatoires

Thomas Letendre (Sorbonne Université)
en collaboration avec M. Ancona et M. Puchol

Grenoble – 19 décembre 2019

Géométrie aléatoire

(M,g) variété riemannienne, compacte, sans bord, de dimension n.
On choisit une sous-variété de codimension r de M "au hasard".

Question

Que peut-on dire de sa géométrie (volume, ...) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, caractéristique d'Euler, ...) ?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi, ...
ou un comportement presque sûr.

Préliminaire : vecteurs gaussiens

$(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ euclidien de dimension N, Λ opérateur auto-adjoint défini-positif.

Définition

Une variable aléatoire $X \in V$ est dite gaussienne, centrée, de variance Λ, si sa loi admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \Lambda^{-1}x\,, x \right\rangle\right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(0, \Lambda)$.

Une gaussienne standard est $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$.

Dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_N)$, on a $X = \sum a_i e_i$, où les coefficients (a_i) sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$.

Sous-variétés algébriques réelles aléatoires

Polynômes de Kostlan

Un polynôme de Kostlan de degré d est un polynôme aléatoire homogène

$$P = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n],$$

où les $(a_\alpha)_{|\alpha|=d}$ sont des gaussiennes standards i.i.d. dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$:

- $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$ est la longueur de α ;
- $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_n!$ et, si $|\alpha| = d$, $\binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha!}$;
- $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n}$.

Polynômes de Kostlan

Un polynôme de Kostlan est $P \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$ dans $\mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$, pour le produit scalaire qui rend la base $\left\{ \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha \;\middle|\; |\alpha| = d \right\}$ orthonormée :

$$\langle P \,, Q \rangle = \frac{1}{\pi^{n+1} d!} \int_{\mathbb{C}^{n+1}} P(z) \overline{Q(z)} e^{-\|z\|^2} \, \mathrm{d}z.$$

C'est le seul produit scalaire (à constante multiplicative près) tel que :

- les monômes sont orthogonaux ;
- pour tout $O \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, $\langle P \circ O \,, Q \circ O \rangle = \langle P \,, Q \rangle$.

Zéros de polynômes de Kostlan

Soient $d \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ et $r \in \{1, \ldots, n\}$.

$$Z_d = P_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap P_r^{-1}(0) \subset \mathbb{S}^n,$$

où $P_1, \ldots, P_r$ sont des polynômes de Kostlan i.i.d. dans $\mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$.

Zéros de polynômes de Kostlan

Soient $d \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ et $r \in \{1, \ldots, n\}$.

$$Z_d = P_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap P_r^{-1}(0) \subset \mathbb{S}^n,$$

où $P_1, \ldots, P_r$ sont des polynômes de Kostlan i.i.d. dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$.

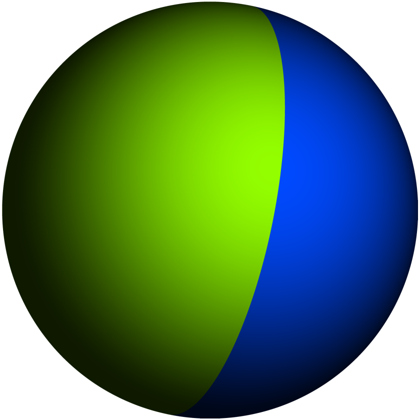
Lemme

Z_d est presque surement une sous-variété lisse, compacte sans bord et de codimension r dans $\mathbb{S}^n$ (éventuellement vide).

Théorème (Kostlan, 1993)

Pour tout $d \geqslant 1$, on a : $\mathbb{E}[\mathrm{Vol}\,(Z_d)] = d^{\frac{r}{2}}\,\mathrm{Vol}\,(\mathbb{S}^{n-r})$.

Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$d = \quad 1$

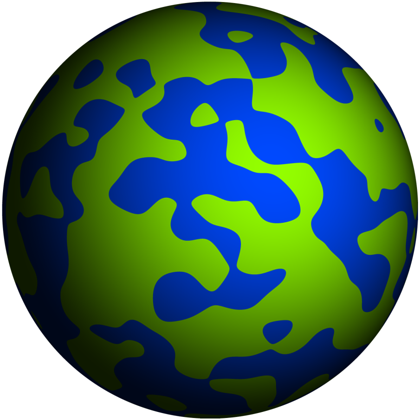
Images par Vincent Beffara.

Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)

$d = \quad 2$

Images par Vincent Beffara.

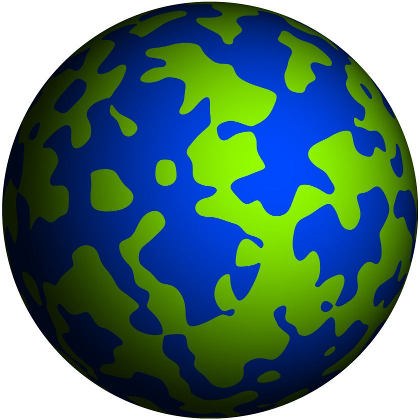
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$d = \quad 100$

Images par Vincent Beffara.

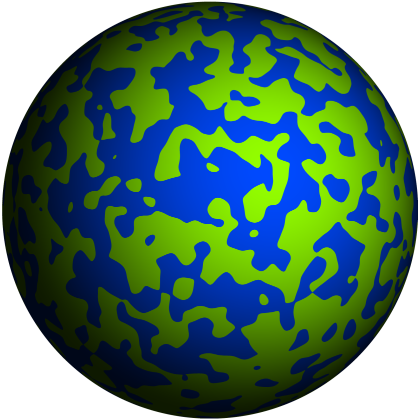
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$d = \quad 200$

Images par Vincent Beffara.

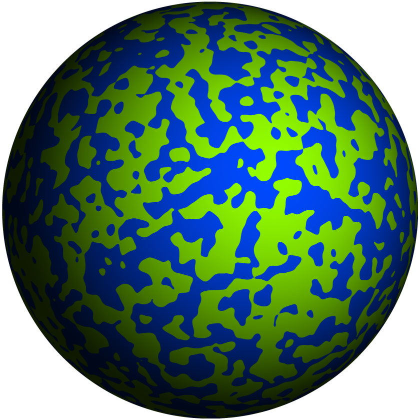
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$d = \quad 500$

Images par Vincent Beffara.

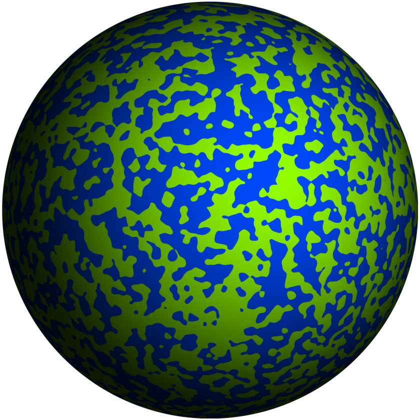
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$d = \;\; 1000$

Images par Vincent Beffara.

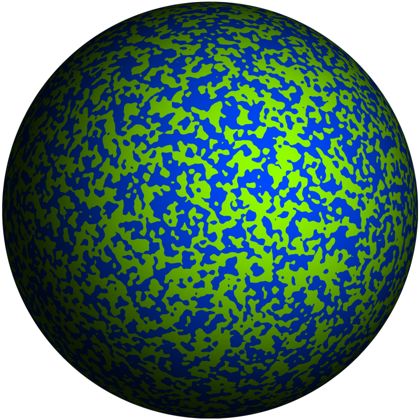
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ $(n = 2,\ r = 1)$



$d =$ 2000

Images par Vincent Beffara.

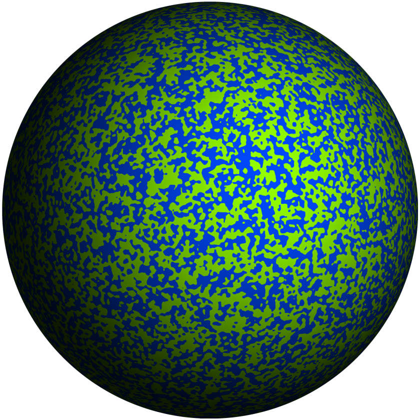
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$d = \ 5000$

Images par Vincent Beffara.

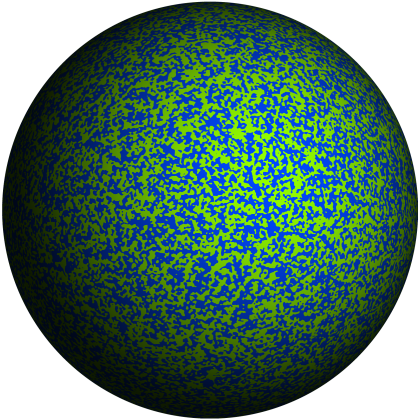
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$d = 10000$

Images par Vincent Beffara.

Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$d = 20000$

Images par Vincent Beffara.

Cadre géométrique général

M variété projective réelle de dimension n.

$\mathcal{E} \to M$ fibré vectoriel de rang r et $\mathcal{L} \to M$ fibré en droites ample.

$s_d \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$ dans un bon espace de sections de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d \to M$.

$Z_d = s_d^{-1}(0)$ est presque surement une sous-variété de degré d, lisse, compacte, sans bord, et de codimension r dans M.

Statistiques linéaires

La métrique euclidienne sur $\mathbb{S}^n$ (resp. riemannienne sur M) induit des mesures de volume sur $\mathbb{S}^n$ (resp. M) et toutes ses sous-variétés.

Z_d définit une mesure de Radon aléatoire par :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0(M), \qquad \langle Z_d \,, \phi \rangle = \int_{x \in Z_d} \phi(x) \left| \mathrm{d}V_{Z_d} \right|.$$

Pour $\phi = \mathbf{1}$, on a $\langle Z_d \,, \mathbf{1} \rangle = \mathrm{Vol}\,(Z_d)$.

Cas de codimension maximale ($r = n$)

Z_d est fini presque surement. La mesure associée est $\displaystyle\sum_{x \in Z_d} \delta_x$, c'est-à-dire :

$$\langle Z_d \,, \phi \rangle = \sum_{x \in Z_d} \phi(x).$$

Moments, loi des grands nombres et théorème central limite

Espérance

Z_d de degré d et codimension r dans M de dimension n.

Théorème (L., 2016)

Soit $A_{n,r} = \dfrac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n}\right)}$. *Pour tout* $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, *on a :*

$$\mathbb{E}[\langle Z_d\,, \phi\rangle] = d^{\frac{r}{2}} A_{n,r}\left(\int_M \phi\,|\mathrm{d}V_M|\right) + \|\phi\|_\infty\, O\!\left(d^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Espérance

Z_d de degré d et codimension r dans M de dimension n.

Théorème (L., 2016)

Soit $A_{n,r} = \dfrac{\operatorname{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\operatorname{Vol}(\mathbb{S}^n)}$. *Pour tout* $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, *on a :*

$$\mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} A_{n,r} \left(\int_M \phi \left| \mathrm{d}V_M \right| \right) + \|\phi\|_\infty O\Big(d^{\frac{r}{2}-1}\Big).$$

Corollaire (Équidistribution en moyenne)

En tant que formes linéaire continues sur $(\mathcal{C}^0(M), \|\cdot\|_\infty)$,

$$d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[Z_d] \xrightarrow[d \to +\infty]{} A_{n,r} \left| \mathrm{d}V_M \right|.$$

Variance

X variable aléatoire L^2 dans $\mathbb{R}$, on note $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$.

Théorème (L.–Puchol, 2017)

Il existe $\sigma_{n,r} > 0$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = d^{r-\frac{n}{2}}\sigma_{n,r}^2\left(\int_M \phi^2\,|\mathrm{d}V_M|\right) + o\left(d^{r-\frac{n}{2}}\right).$$

Variance

X variable aléatoire L^2 dans $\mathbb{R}$, on note $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}[X])^2\Big]$.

Théorème (L.–Puchol, 2017)

Il existe $\sigma_{n,r} > 0$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d\,, \phi\rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \sigma_{n,r}^2 \left(\int_M \phi^2 \,|\mathrm{d} V_M| \right) + o\Big(d^{r-\frac{n}{2}}\Big)\,.$$

- Pour le nombre de racines de n polynômes de Kostlan dans $\mathbb{S}^n$ ($n = r$ et $\phi = \mathbf{1}$) prouvé par Armentano–Azaïs–Dalmao–Leòn (2015 et 2017).
- $\sigma_{n,r}$ est explicite et ne dépend que de n et r.
- La positivité de $\sigma_{n,r}$ est non triviale.

Moments centrés

X variable aléatoire L^p ($p \geqslant 2$) dans $\mathbb{R}$, on note $m_p(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^p\right]$.

Théorème (Ancona–L., 2019)

Dans le cas $n = r = 1$, pour tout $p \geqslant 3$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$m_p\left(\langle Z_d\,,\phi\rangle\right) = \mu_p \operatorname{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle)^{\frac{p}{2}} + o(d^{\frac{p}{4}}),$$

où μ_p est le p-ième moment d'une gaussienne standard dans $\mathbb{R}$.

Moments centrés

X variable aléatoire L^p ($p \geqslant 2$) dans $\mathbb{R}$, on note $m_p(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X]\right)^p\right]$.

Théorème (Ancona–L., 2019)

Dans le cas $n = r = 1$, pour tout $p \geqslant 3$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$m_p\left(\langle Z_d\,,\phi\rangle\right) = \mu_p \operatorname{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle)^{\frac{p}{2}} + o(d^{\frac{p}{4}}),$$

où μ_p est le p-ième moment d'une gaussienne standard dans $\mathbb{R}$.

Conjecture

Pour n et r quelconques, même formule en remplaçant $\frac{p}{4}$ par $\frac{p}{2}(r - \frac{n}{2})$.

Loi forte des grands nombres

$(Z_d)_{d\geqslant 1}$ suite de sous-variétés algébriques aléatoires de codimension r dans M de dimension n telle que :

- les termes sont globalement indépendants,
- Z_d est de degré d et distribuée comme précédemment.

Théorème (L.–Puchol, 2017 ; Ancona–L., 2019)

Si $n = 1$ ou $n \geqslant 3$ alors, presque surement, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$ on a :

$$d^{-\frac{r}{2}} \langle Z_d \,, \phi \rangle \xrightarrow[d \to +\infty]{} A_{n,r} \int_M \phi \, |\mathrm{d}V_M| \,.$$

C'est-à-dire, presque surement $d^{-\frac{r}{2}} Z_d \xrightarrow[d\to+\infty]{\text{faible}-*} A_{n,r} \, |\mathrm{d}V_M|$.

Théorème central limite

Théorème (Ancona–L., 2019)

Si $n = r = 1$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, on a :

$$\frac{1}{d^{\frac{1}{4}}\sigma_{1,1}}\Big(\langle Z_d\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\Big) \xrightarrow[d\to+\infty]{\textit{loi}} \mathcal{N}\left(0,\|\phi\|_2^2\right).$$

- On conjecture un résultat similaire pour tout (n, r).
- Prouvé par Armentano–Azaïs–Dalmao–Leòn pour le volume des zéros de polynômes de Kostlan dans $\mathbb{S}^n$.

Autres corollaires

Corollaire (Concentration en probabilité)

Soient $\varepsilon > 0$ *et* $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$. *Lorsque* $d \to +\infty$, *on a :*

$$\mathbb{P}\left(d^{-\frac{r}{2}}\left|\langle Z_d\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right| > \varepsilon\right) = \begin{cases} O(d^{-\frac{n}{2}}) \\ O(d^{-\frac{p}{2}}) & \forall p \in \mathbb{N},\ \textit{si } n = r = 1. \end{cases}$$

Autres corollaires

Corollaire (Concentration en probabilité)

Soient $\varepsilon > 0$ *et* $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$*. Lorsque* $d \to +\infty$*, on a :*

$$\mathbb{P}\left(d^{-\frac{r}{2}}\left|\langle Z_d\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right| > \varepsilon\right) = \begin{cases} O(d^{-\frac{n}{2}}) \\ O(d^{-\frac{p}{2}}) & \forall p \in \mathbb{N},\ si\ n = r = 1. \end{cases}$$

Corollaire (Hole probability)

Soit $U \subset M$ *ouvert non vide. Lorsque* $d \to +\infty$*, on a :*

$$\mathbb{P}\left(Z_d \cap U = \emptyset\right) = \begin{cases} O(d^{-\frac{n}{2}}) \\ O(d^{-\frac{p}{2}}) & \forall p \in \mathbb{N},\ si\ n = r = 1. \end{cases}$$

Preuves des corollaires

Concentration en probabilité

On applique l'inégalité de Markov pour le moment d'ordre $2p$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(d^{-\frac{r}{2}}\left|\langle Z_d\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right| > \varepsilon\right) &\leqslant \varepsilon^{-2p} m_{2p}\left(d^{-\frac{r}{2}}\langle Z_d\,,\phi\rangle\right)\\ &= O\big(d^{-pr} m_{2p}\left(\langle Z_d\,,\phi\rangle\right)\big)\,.\end{aligned}$$

Pour n et r quelconques, on prend $p = 1$ et on utilise l'asymptotique de m_2.

Pour $n = r = 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le dernier terme est $O(d^{-\frac{p}{2}})$.

Hole probability

Soit $U \subset M$ ouvert non vide. Il existe $\phi_U \in \mathcal{C}^0(M)$ telle que :

- pour tout $x \in U$, $\phi_U(x) > 0$,
- pour tout $x \in M \setminus U$, $\phi_U(x) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < A_{n,r} \displaystyle\int_M \phi_U \, |\mathrm{d}V_M|$.

Hole probability

Soit $U \subset M$ ouvert non vide. Il existe $\phi_U \in \mathcal{C}^0(M)$ telle que :

- pour tout $x \in U$, $\phi_U(x) > 0$,
- pour tout $x \in M \setminus U$, $\phi_U(x) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < A_{n,r} \displaystyle\int_M \phi_U \, |\mathrm{d}V_M|$.

Pour tout d assez grand, $d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi_U \rangle] > \varepsilon$ et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Z_d \cap U = \emptyset\right) &= \mathbb{P}\left(\langle Z_d \,, \phi_U \rangle = 0\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(d^{-\frac{r}{2}} \left| \langle Z_d \,, \phi_U \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi_U \rangle] \right| > \varepsilon \right).\end{aligned}$$

Hole probability

Soit $U \subset M$ ouvert non vide. Il existe $\phi_U \in \mathcal{C}^0(M)$ telle que :

- pour tout $x \in U$, $\phi_U(x) > 0$,
- pour tout $x \in M \setminus U$, $\phi_U(x) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < A_{n,r} \displaystyle\int_M \phi_U \, |\mathrm{d}V_M|$.

Pour tout d assez grand, $d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi_U \rangle] > \varepsilon$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z_d \cap U = \emptyset\right) &= \mathbb{P}\left(\langle Z_d \,, \phi_U \rangle = 0\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(d^{-\frac{r}{2}} \left| \langle Z_d \,, \phi_U \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi_U \rangle] \right| > \varepsilon \right). \end{aligned}$$

On utilise la concentration en probabilité pour $\langle Z_d \,, \phi_U \rangle$.

Loi forte des grands nombres

Soit $p \geqslant 1$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{d \geqslant 1} \left(d^{-\frac{r}{2}} \left|\langle Z_d \,, \phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi\rangle]\right|\right)^{2p}\right] = \sum_{d \geqslant 1} d^{-pr} m_{2p}(\langle Z_d \,, \phi\rangle).$$

Pour $n \geqslant 3$, avec $p = 1$ on a $d^{-r} m_2(\langle Z_d \,, \phi\rangle) = O(d^{-\frac{n}{2}})$ sommable.

Pour $n = r = 1$, avec $p = 3$ on a $d^{-3} m_6(\langle Z_d \,, \phi\rangle) = O(d^{-\frac{3}{2}})$ sommable.

Loi forte des grands nombres

Soit $p \geqslant 1$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{d\geqslant 1}\left(d^{-\frac{r}{2}}\left|\langle Z_d\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right|\right)^{2p}\right] = \sum_{d\geqslant 1} d^{-pr} m_{2p}(\langle Z_d\,,\phi\rangle).$$

Pour $n \geqslant 3$, avec $p = 1$ on a $d^{-r} m_2(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = O(d^{-\frac{n}{2}})$ sommable.

Pour $n = r = 1$, avec $p = 3$ on a $d^{-3} m_6(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = O(d^{-\frac{3}{2}})$ sommable.

Dans les deux cas, $\sum_{d\geqslant 1}\left(d^{-\frac{r}{2}}\left|\langle Z_d\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right|\right)^{2p} < +\infty$ p.s., et :

$$d^{-\frac{r}{2}}\langle Z_d\,,\phi\rangle \sim d^{-\frac{r}{2}}\mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle] \xrightarrow[d\to+\infty]{} A_{n,r}\int_M \phi\,|\mathrm{d}V_M|\,.$$

Loi forte des grands nombres

Soit $p \geqslant 1$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{d\geqslant 1}\left(d^{-\frac{r}{2}}\left|\langle Z_d\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right|\right)^{2p}\right] = \sum_{d\geqslant 1} d^{-pr} m_{2p}(\langle Z_d\,,\phi\rangle).$$

Pour $n \geqslant 3$, avec $p = 1$ on a $d^{-r} m_2(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = O(d^{-\frac{n}{2}})$ sommable.

Pour $n = r = 1$, avec $p = 3$ on a $d^{-3} m_6(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = O(d^{-\frac{3}{2}})$ sommable.

Dans les deux cas, $\sum_{d\geqslant 1}\left(d^{-\frac{r}{2}}\left|\langle Z_d\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right|\right)^{2p} < +\infty$ p.s., et :

$$d^{-\frac{r}{2}}\langle Z_d\,,\phi\rangle \sim d^{-\frac{r}{2}}\mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle] \xrightarrow[d\to+\infty]{} A_{n,r}\int_M \phi\,|\mathrm{d}V_M|\,.$$

On a conclut en utilisant la séparabilité de $(\mathcal{C}^0(M), \|\cdot\|_\infty)$.

Théorème central limite ($n = r = 1$)

Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, pour tout d, $X_d = \dfrac{\langle Z_d \,, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi \rangle]}{d^{\frac{1}{4}} \sigma_{1,1}}$ est centrée et :

$$\forall p \geqslant 2, \qquad m_p(X_d) = \frac{m_p(\langle Z_d \,, \phi \rangle)}{\left(d^{\frac{1}{4}} \sigma_{1,1}\right)^p} \xrightarrow[d \to +\infty]{} \mu_p \left\| \phi \right\|_2^p .$$

Théorème central limite ($n = r = 1$)

Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, pour tout d, $X_d = \dfrac{\langle Z_d\,, \phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,, \phi\rangle]}{d^{\frac{1}{4}}\sigma_{1,1}}$ est centrée et :

$$\forall p \geqslant 2, \qquad m_p(X_d) = \frac{m_p(\langle Z_d\,, \phi\rangle)}{\left(d^{\frac{1}{4}}\sigma_{1,1}\right)^p} \xrightarrow[d\to+\infty]{} \mu_p \left\|\phi\right\|_2^p.$$

$\mathcal{N}(0, \|\phi\|_2^2)$ est l'unique loi sur $\mathbb{R}$ dont la suite des moments est $\left(\mu_p \|\phi\|_2^p\right)$.

Par le théorème des moments $X_d \xrightarrow[d\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}\left(0, \|\phi\|_2^2\right)$.

Preuves des estimées de moments

Fonction de corrélation

Un polynôme de Kostlan P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x\in\mathbb{S}^n}$.

Sa fonction de corrélation est :

$$e_d(x,y) = \mathbb{E}[P(x)P(y)] = \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha = (\langle x\,,y\rangle)^d = \cos\left(\rho(x,y)\right)^d,$$

où ρ est la distance géodésique sur $\mathbb{S}^n$.

Remarque

En prenant des dérivées partielles : $\frac{\partial e_d}{\partial x_i}(x,y) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)P(y)\right]$.

Fonction de corrélation

Un polynôme de Kostlan P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Sa fonction de corrélation est :

$$e_d(x,y) = \mathbb{E}[P(x)P(y)] = \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha = (\langle x\,, y\rangle)^d = \cos\left(\rho(x,y)\right)^d,$$

où ρ est la distance géodésique sur $\mathbb{S}^n$.

Remarque

En prenant des dérivées partielles : $\frac{\partial e_d}{\partial x_i}(x,y) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)P(y)\right]$.

Dans le cas général, e_d est le noyau de Bergman de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$, et :

$$e_d\left(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}\right) \simeq e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2}.$$

Formule de Kac–Rice (cas des hypersurfaces, $r = 1$)

Théorème

Pour tout d assez grand, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E}\left[\int_{Z_d} \phi \,|\mathrm{d}V_{Z_d}|\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \phi(x) \frac{\mathbb{E}[\|\nabla_x s_d\| \mid s_d(x) = 0]}{\sqrt{e_d(x,x)}} \,|\mathrm{d}V_M| \,.$$

Formule de Kac–Rice (cas des hypersurfaces, $r = 1$)

Théorème

Pour tout d assez grand, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E}\left[\int_{Z_d} \phi \, |\mathrm{d}V_{Z_d}|\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \phi(x) \frac{\mathbb{E}[\|\nabla_x s_d\| \,|\, s_d(x) = 0]}{\sqrt{e_d(x,x)}} \, |\mathrm{d}V_M| \, .$$

$(s_d(x), \nabla_x s_d)$ est gaussien centré, de covariance :

$$\begin{pmatrix} e_d(x,x) & \partial_{y_j} e_d(x,x) \\ \partial_{x_i} e_d(x,x) & \partial_{x_i}\partial_{y_j} e_d(x,x) \end{pmatrix}_{1 \leqslant i,j \leqslant n} .$$

La densité ne dépend que de e_d et des ses premières dérivées en (x,x).

Formule de Kac–Rice pour les moments

Pour tout $p \geqslant 2$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$m_p(\langle Z_d\,, \phi\rangle) = \int_{M^p} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi(x_i) \right) \mathcal{D}_d^p(x_1, \dots, x_p)\, |\mathrm{d}V_M|^p\,.$$

- $\mathcal{D}_d^p(x_1, \dots, x_p)$ ne dépend que des premières dérivées de e_d en (x_i, x_j).
- $\mathcal{D}_d^p$ est singulière le long de $\Delta = \{(x_1, \dots, x_p) \in M^p \mid \exists i \neq j, x_i = x_j\}$.

Asymptotique de la variance

Estimées sur $\mathcal{D}_d^2$

- $\left|\mathcal{D}_d^2(x,y)\right| = O(d^{r-\frac{n}{2}-1})$ uniformément sur $\rho(x,y) \geqslant K\frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.
- $\mathcal{D}_d^2(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}) \simeq d^r \mathcal{D}(\|z\|)$ sur $\|z\| \leqslant K \ln d$.

Asymptotique de la variance

Estimées sur $\mathcal{D}_d^2$

- $\left|\mathcal{D}_d^2(x,y)\right| = O(d^{r-\frac{n}{2}-1})$ uniformément sur $\rho(x,y) \geqslant K\frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.
- $\mathcal{D}_d^2(x, x+\frac{z}{\sqrt{d}}) \simeq d^r\mathcal{D}(\|z\|)$ sur $\|z\| \leqslant K\ln d$.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) &\simeq \int_{\rho(x,y)\leqslant K\frac{\ln d}{\sqrt{d}}} \phi(x)\phi(y)\mathcal{D}_d^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\simeq d^{-\frac{n}{2}} \int_{x\in M}\int_{\|z\|\leqslant K\ln d} \phi(x)\phi\left(x+\frac{z}{\sqrt{d}}\right)\mathcal{D}_d^2\left(x, x+\frac{z}{\sqrt{d}}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
&\simeq d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_M \phi(x)^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}(\|z\|)\,\mathrm{d}z\right).
\end{aligned}
$$

Partition de M^p

Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in M^p$ et $d \geqslant 1$, on définit un graphe $G_d(x)$:

- les sommets sont $\{1, \ldots, p\}$,
- il y a une arête entre i et j si et seulement si $\rho(x_i, x_j) \leqslant K\frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Partition de M^p

Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in M^p$ et $d \geqslant 1$, on définit un graphe $G_d(x)$:

- les sommets sont $\{1, \dots, p\}$,
- il y a une arête entre i et j si et seulement si $\rho(x_i, x_j) \leqslant K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Les composantes connexes de $G_d(x)$ donnent une partition de $\{1, \dots, p\}$: $\mathcal{I}_d(x) = \{I_1, \dots, I_m\}$, i.e. $\bigsqcup_{i=1}^m I_i = \{1, \dots, p\}$.

Partition de M^p

Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in M^p$ et $d \geqslant 1$, on définit un graphe $G_d(x)$:

- les sommets sont $\{1, \ldots, p\}$,
- il y a une arête entre i et j si et seulement si $\rho(x_i, x_j) \leqslant K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Les composantes connexes de $G_d(x)$ donnent une partition de $\{1, \ldots, p\}$: $\mathcal{I}_d(x) = \{I_1, \ldots, I_m\}$, i.e. $\bigsqcup_{i=1}^m I_i = \{1, \ldots, p\}$.

Si $\mathcal{I}$ partition de $\{1, \ldots, p\}$, on définit : $M^p_{\mathcal{I}} = \{x \in M^p \mid \mathcal{I}_d(x) = \mathcal{I}\}$.

$$M^p = \bigsqcup_{\mathcal{I} \text{ partition}} M^p_{\mathcal{I}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Vol}\left(M^p_{\mathcal{I}}\right) = O\left(\left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right)^{n(p-m)}\right).$$

Contributions des $M^p_{\mathcal{I}}$ (cas $n = r = 1$)

Partitions $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_m\}$ avec m petit

On a $\left|\mathcal{D}^p_d(x)\right| = O(d^{\frac{p}{2}})$ uniformément. Si $m < \frac{p}{2}$, la partie $M^p_{\mathcal{I}}$ contribue :

$$O\left(d^{\frac{p}{2}}\left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right)^{p-m}\right) = O(d^{\frac{m}{2}}(\ln d)^p) = o(d^{\frac{p}{4}}).$$

Contributions des $M_{\mathcal{I}}^p$ (cas $n = r = 1$)

Partitions $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_m\}$ avec m petit

On a $\left|\mathcal{D}_d^p(x)\right| = O(d^{\frac{p}{2}})$ uniformément. Si $m < \frac{p}{2}$, la partie $M_{\mathcal{I}}^p$ contribue :

$$O\left(d^{\frac{p}{2}}\left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right)^{p-m}\right) = O(d^{\frac{m}{2}}(\ln d)^p) = o(d^{\frac{p}{4}}).$$

Partitions $\mathcal{I}$ contenant un singleton

On a $\left|\mathcal{D}_d^p(x)\right| = O(d^{\frac{p}{4}-1})$ uniformément sur $M_{\mathcal{I}}^p$. Contribue $o(d^{\frac{p}{4}})$.

Contributions des $M^p_{\mathcal{I}}$ (cas $n = r = 1$)

Partitions $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_m\}$ avec m petit

On a $\left|\mathcal{D}^p_d(x)\right| = O(d^{\frac{p}{2}})$ uniformément. Si $m < \frac{p}{2}$, la partie $M^p_{\mathcal{I}}$ contribue :

$$O\left(d^{\frac{p}{2}}\left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right)^{p-m}\right) = O(d^{\frac{m}{2}}(\ln d)^p) = o(d^{\frac{p}{4}}).$$

Partitions $\mathcal{I}$ contenant un singleton

On a $\left|\mathcal{D}^p_d(x)\right| = O(d^{\frac{p}{4}-1})$ uniformément sur $M^p_{\mathcal{I}}$. Contribue $o(d^{\frac{p}{4}})$.

Partitions en paires $\mathcal{I} = \left\{\{a_i, b_i\} \,\middle|\, 1 \leqslant i \leqslant \frac{p}{2}\right\}$

Sur $M^p_{\mathcal{I}}$, on a $\mathcal{D}^p_d(x_1, \dots, x_p) \simeq \prod_{i=1}^{\frac{p}{2}} \mathcal{D}^2_d(x_{a_i}, x_{b_i})$. Contribue :

$$\prod_{i=1}^{\frac{p}{2}} \int_{\rho(x_{a_i}, x_{b_i}) \leqslant K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}} \phi(x_{a_i})\phi(x_{b_i})\mathcal{D}^2_d(x_{a_i}, x_{b_i}) \,\mathrm{d}x_{a_i}\,\mathrm{d}x_{b_i} \simeq \mathrm{Var}(\langle Z_d\,, \phi\rangle)^{\frac{p}{2}}\,.$$

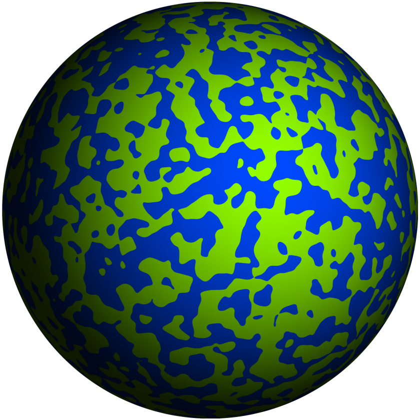
Conclusion de la preuve

- Chaque partition en paires contribue $\mathrm{Var}(\langle Z_d\,, \phi\rangle)^{\frac{p}{2}}$.
- Les autres partitions contribuent $o(d^{\frac{p}{4}})$.

Le nombre de partitions en paires de $\{1, \dots, p\}$ est :

$$\mu_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair,} \\ \dfrac{p!}{2^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p}{2}\right)!} & \text{si } p \text{ est pair.} \end{cases}$$

Merci de votre attention



Courbe algébrique aléatoire de degré $d = 1000$ dans $\mathbb{S}^2$.

Image par Vincent Beffara.